ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №7
ПРЕДЕЛ ФУНКЦИЙ. НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИЙ

Пример. С помощью определения Коши доказать, что $\lim\limits_{x\to 2} x^2 = 4$.

Решение

Пусть $\varepsilon > 0$ произвольное число. Тогда

$$\left|x^2 - 4\right| = \left|(x-2)^2 + 4(x-2)\right| \le \left|x-2\right|^2 + 4\left|x-2\right| \le \varepsilon,$$

как только $0 < \left|x-2\right| < \sqrt{4+\varepsilon} - 2$. Отсюда видно, что если взять $\delta(\varepsilon) = \sqrt{4+\varepsilon} - 2$, то для всех x удовлетворяющих неравенствам $0 < \left|x-2\right| < \delta$ выполняется неравенство

$$\left|f(x) - 4\right| = \left|x^2 - 4\right| = \left|(x-2)^2 + 4(x-2)\right| \le \left|x-2\right|^2 + 4\left|x-2\right| < \delta^2 + 4\delta =$$

$$= \left(\sqrt{4+\varepsilon} - 2\right)^2 + 4\left(\sqrt{4+\varepsilon} - 2\right) = 4 + \varepsilon - 4\sqrt{4+\varepsilon} + 4 + 4\sqrt{4+\varepsilon} - 8 = \varepsilon.$$

Согласно определению Коши это означает $\lim\limits_{x\to 2} x^2 = 4$.

Упражнения

1. Пользуясь определением предела функции по Коши показать, что

$$\lim_{x\to 4} \frac{x^2 - 16}{x^2 - 4x} = 2.$$

2. Пользуясь определением предела функции по Гейне и теоремами о пределах последовательностей, найти предел функции

$$f(x) = \frac{x^2 - 16}{x^2 - 4x}$$

в точке $\boldsymbol{x} = 4$.

Пример. Пользуясь определением предела по Гейне, доказать, что функция $f(x) = \sin\dfrac{1}{x}$ не имеет предела в точке $x = 0$.

Решение

Достаточно показать, что существуют последовательности $\{x_k\}$ и $\{\tilde{x}_k\}$ с отличными от нуля членами, сходящиеся к нулю и такие, что $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_k) \ne \lim\limits_{k\to\infty} f(\tilde{x}_k)$. Возьмем $x_k = \left(\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi\right)^{-1}$, $\tilde{x}_k = (k\pi)^{-1}$, тогда $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = \lim\limits_{x\to\infty} \tilde{x}_k = 0$, $f(x_k) = 1$ и $f(\tilde{x}_k) = 0$ для всех $k \in \mathrm{N}$, и поэтому $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_k) = 1$, а $\lim\limits_{k\to\infty} f(\tilde{x}_k) = 0$. Следовательно, функция $\sin\dfrac{1}{x}$ не имеет предела в точке $x = 0$.

Упражнения

В задачах 1 – 4 показать, что пределы не существуют.

1. $\lim\limits_{x\to 1}\sin\dfrac{1}{x-1}$.

2. $\lim\limits_{x\to 0} 2^{\frac{1}{x}}$.

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\sin x$.

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\cos x$.

Пример. Для функции

$$sign(x)=\begin{cases}-1, & если \quad x<0,\\ 0, & если \quad x=0,\\ 1, & если \quad x>0,\end{cases}$$

график которой изображен на рис. 4,

$$\lim_{x\to -0} f(x) = f(-0) = -1, \qquad \lim_{x\to +0} f(x) = f(+0) = 1.$$

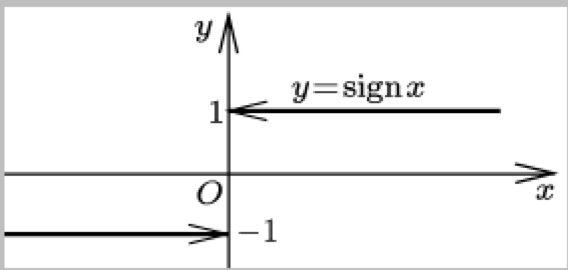


Рис. 4

Отметим еще, что если

$$\forall\varepsilon>0\ \ \exists\delta>0:\ \ \forall x\in \dot{O}_\delta(a)\ \ \Rightarrow f(x)\in[b,\ \ b+\varepsilon),$$

т.е. значения функции лежат в правой ε- полуокрестности числа b, то пишут $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b+0$. В частности, если $b=0$, то пишут $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+0$.

Аналогично

$$\left\{\lim_{x\to a} f(x)=b-0\right\}\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \ \exists\delta>0:\ \ \forall x\in \dot{O}_\delta(a)\ \ \Rightarrow f(x)\in(b-0,\ \ b]$$

Пример. Для функции

$$f(x)=\begin{cases}1-x, & если \quad x<0,\\ 2, & если \quad x=0,\\ 1+\sqrt{x}, & если \quad x>0,\end{cases}$$

график которой изображен на рис. 5, $\lim\limits_{x\to a} f(x)=1+0$.

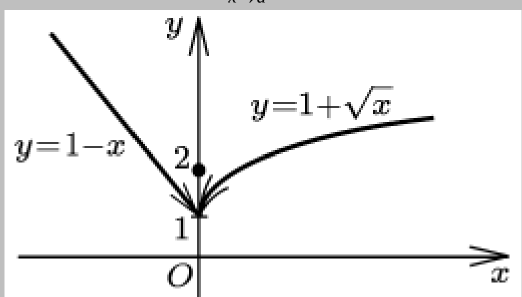


Рис. 5

Аналогичный смысл имеют записи вида

$$\lim_{x\to a-0} f(x)=b+0, \qquad \lim_{x\to a+0} f(x)=b-0.$$

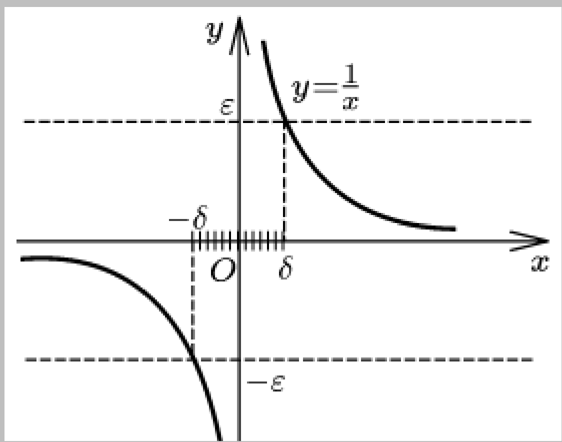
Например,

$$\left\{\lim_{x\to a-0} f(x)=b+0\right\} \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta>0: \quad \forall x\in(a-\delta,\ a) \Rightarrow f(x)\in\{b,\quad b+\varepsilon).$$

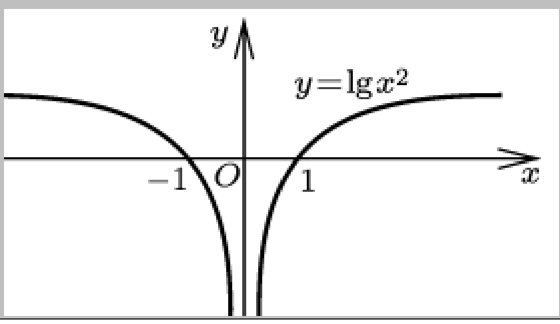
Упражнения

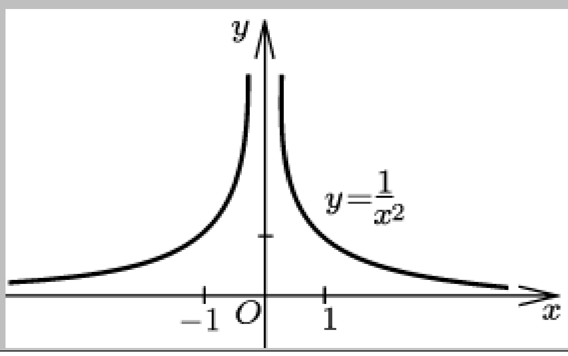
1. Записать с помощью логических символов утверждение:
$$\lim_{x\to a+0} f(x)=b-0.$$
2. Доказать, что функция $f(x)$ имеет предел в точке $\boldsymbol{a}$ тогда и только тогда, когда в этой точке существуют односторонние пределы функции f и выполняется равенство $f(a-0)=f(a+0)$.

Пример. Если $f(x)=\dfrac{1}{x}$, то $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\infty$.



Примеры. Если $f(x)=\lg x^2$, то $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=-\infty$, а если $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$, то $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=+\infty$.





Упражнение

Сформулировать с помощью логических символов утверждение: а) $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=+\infty$; б) $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=+\infty$.

Пример. Если $f(x)=\dfrac{3-2x}{x+1}$ (рис.), то $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-2$.

В самом деле, $f(x)=-2+\dfrac{5}{x+1}$, и если $x>1$, то $x+1<2x$. Поэтому $\dfrac{5}{x+1}<\dfrac{5}{2x}$, откуда следует, что неравенство $\left|f(x)+2\right|<\dfrac{5}{2x}<\varepsilon$ для любого $\varepsilon>0$ выполняется при любом $x>\delta$, где $\delta=\max\left(1,\ \dfrac{5}{2\varepsilon}\right)$, т. е. при любом $x\in O_\delta(+\infty)$.

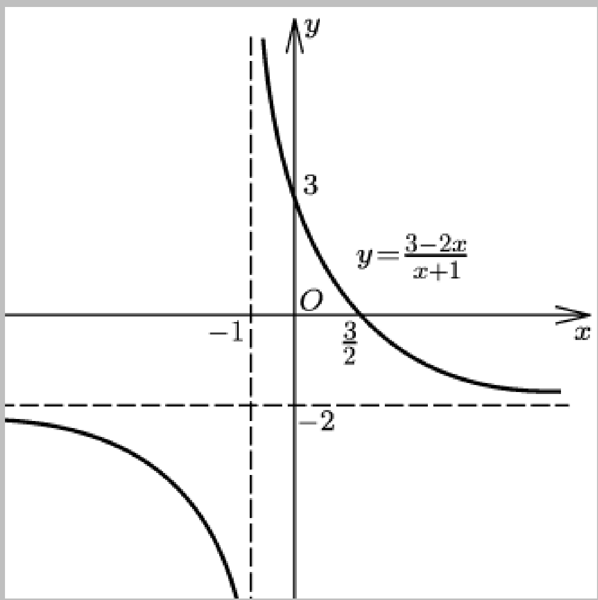


Рис. 9

Если $\forall\varepsilon>0\ \ \exists\delta>0:\ \ \forall x\in O_\delta(-\infty)\Rightarrow f(x)\in O_\varepsilon(b)$, т.е. неравенство $\left|f(x)-b\right|<\varepsilon$ в выполняется для всех $x\in(-\infty,\ -\delta)$, то говорят, что число b есть **предел функции** $f(x)$ **при** x**, стремящемся к минус бесконечности,** и пишут $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=b$.

Пример. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3-2x}{x+1}=-2$ (рис.).

Пример. Если $f(x)=\dfrac{3-2x}{x+1}$ (рис.), то $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=-2$.

Упражнение

Сформулировать с помощью логических символов и окрестностей (или неравенств) следующие утверждения: а) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\infty$; б) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=+\infty$.

Упражнения

В задачах 1-30 найти пределы функций.

1. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+4x-5}{x^2-1}$.

2. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+4x-5}{x^2-1}$.

3. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^2+4x-5}{x^2-1}$.

4. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+4x-5}{x^2-1}$.

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^7+5x^6+4x^3}{x^7+2x^3}$.

6. $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{2x^2-11x-21}{x^2-9x+14}$.

7. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4-x^3+x^2-3x+2}{x^3-x^2-x+1}$.

8. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4-2x+1}{x^8-2x+1}$.

9. $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{(x^2-2x)^2-14(x^2+2x)-15}{x^4-29x^2+100}$.

10. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{3}{1-x^3}+\dfrac{1}{x-1}\right)$.

11. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{2}{2x-x^2}+\dfrac{1}{x^2-3x+2}\right)$.

12. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x^2-4x+6}{x^2-5x+4}-\dfrac{x-4}{3x^2-9x+6}\right)$.

13. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{(x+5)^5+(x+6)^5+(x+7)^5}{x^5+5^5}$.

14. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{(x+1)^2(3-7x)^2}{(2x-1)^4}$.

15. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{(2x^3+7x-1)^6}{(2x^6-13x^2+x)^3}$.

16. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{(1+x^{11}+7x^{13})^3}{(1+x^4)^{10}}$.

17. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x^3+3x^2}{x^2+1}-x\right)$.

18. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x^2}{2x+1}+\dfrac{x^3+4x^2-2}{1-2x^2}\right)$.

19. $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{\sqrt{x-2}-2}{x-6}$.

20. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-\sqrt[3]{x}}{1-\sqrt[5]{x}}$.

21. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{x}$.

22. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg 4x}{\sin x}$.

23. $\lim\limits_{x\to 0} x ctg 5x$.

24. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin \alpha x}{\sin \beta x}, \quad \beta\neq 0$.

25. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{\sin 6x-\sin 7x}$.

26. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2}{\sin 2x\sin x}-\dfrac{1}{\sin^2 x}\right)$.

27. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7\pi x}{\sin 2\pi x}$.

28. $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\sin x}{\pi^2-x^2}$.

29. $\lim\limits_{x\to \infty} x\sin\dfrac{\pi}{x}$.

30. $\lim\limits_{x\to \infty} x^2\left(\cos\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{3}{x}\right)$.

31. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{1-tg^2 x}{\sqrt{2}\cos x-1}$.

В задачах 32-34 найти а) $f(-0)$; б) $f(+0)$.

32. $f(x)=\dfrac{x-|x|}{2x}$.

33. $f(x)=\arccos(x-1)$.

34. $f(x)=2^{ctgx}$.

В задачах 35-36 найти а) $f(x_0-0)$; б) $f(x_0+0)$.

35. $f(x)=\dfrac{1}{x-[x]}, \quad x_0=1.$ **36.** $f(x)=x+[x^2], \quad x_0=10.$

Пример. Доказать, что $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x^2+y^2)^d=0$, если $d>0$.

Решение

Возьмем любое $\varepsilon>0$. Положим $\delta=\varepsilon^{\frac{1}{2d}}$. Пусть $(x,y)\in O_\delta(0,0)$, тогда

$$(x^2+y^2)^d<\delta^{2d}<\varepsilon,$$

т.е.

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x^2+y^2)^d=0.$$

Упражнение

Показать, что $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{|x|^\alpha |y|^\beta}{(x^2+y^2)^\gamma}=0$, если $\alpha+\beta-2\gamma>0$.

Пример. Функция $f(x,y)=\dfrac{2xy}{x^2+y^2}$ не имеет предела при $(x,y)\to(0,0)$.

Решение

Рассмотрим последовательность точек $X_k\left(\dfrac{1}{k},\ \dfrac{1}{k}\right)$, $k=1,2,\ldots.$ Тогда $f(x_k,y_k)=1$ и, следовательно, $\lim\limits_{k\to\infty}f(x_k,y_k)=1$. Если же взять последовательность точек $X'_k\left(\dfrac{1}{k},\ -\dfrac{1}{k}\right)$, $k=1,2,\ldots.$ то $\lim\limits_{k\to\infty}f(x'_k,y'_k)=-1$. Так как при любом $k\in\mathrm{N}$ точки (x_k,y_k) и (x'_k,y'_k) не совпадают с точкой $(0,0)$, а последовательности точек (x_k,y_k) и (x'_k,y'_k) сходятся к точке $(0,0)$, то, используя определение предела по Гейне, получаем, что функция $f(x,y)=\dfrac{2xy}{x^2+y^2}$ не имеет предела при $(x,y)\to(0,0)$.

Упражнение

Функция $f(x,y)=\dfrac{2x^2y}{x^4+y^2}$ не имеет предела при $(x,y)\to(0,0)$.

Пример. Показать, что предел функции $f(x,y)=\dfrac{2xy}{x^2+y^2}$ в точке $(0,0)$ по любому направлению $l=(\cos\alpha,\sin\alpha)$ существует и равен $\sin 2\alpha$.

Решение

Так как при $t>0$ выполнено равенство

$$f(t\cos\alpha, t\sin\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha = \sin 2\alpha,$$

то

$$\lim_{t\to+0} f(t\cos\alpha, t\sin\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha = \sin 2\alpha$$

Упражнение

Показать, что предел функции $f(x,y) = \dfrac{2x^2 y}{x^4 + y^2}$ в точке $(0,0)$ по любому направлению $\boldsymbol{l} = (\cos\alpha, \sin\alpha)$ существует и равен нулю.

Заметим, что следует, что из существования и равенства пределов по любому направлению в точке $(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0)$ не вытекает существование в этой точке предела функции.

Предел функции $f(X)$ в точке $X_0 \in R^n$ по направлению $l = (l_1, l_2, ..., l_n)$, где $\boldsymbol{l}_1^2 + \boldsymbol{l}_2^{2.} + \cdots + \boldsymbol{l}_{\boldsymbol{n}}^2 = 1$, определяется по аналогии со случаем функции двух переменных.

Упражнения

1. Пусть выполнены следующие условия:

а) множества $\mathsf{M}_i \subset R^n$, $i - 1,2,...,N$;

б) X_0 есть предельная точка каждого из множеств M_i, $i - 1,2,...,N$;

в) функция $f(X)$ определена на множестве $\mathsf{M} = \bigcup_{i=1}^{N} \mathsf{M}_i$.

Доказать, что $b = \lim\limits_{X\to A,\ X\in \mathsf{M}} f(X)$ в том и только в том случае, когда $b = \lim\limits_{X\to A,\ X\in \mathsf{M}_i} f(X)$, $i = 1,2,...,N$

2. Показать, что результат упражнения 1 не допускает обобщения на тот случай, когда множество M есть объединение бесконечного множества множеств $\bigcup_{\alpha} \mathsf{M}_\alpha$.

Пример. Доказать, что функция $f(x)$ непрерывна в точке a, если:

$a)\quad f(x) = x^3,\ a = 1;$

$b)\quad f(x) = \dfrac{1}{x^2},\ a \neq 0;$

$c)\quad f(x) = \sqrt{x},\ a > 0;$

$$d)\quad f(x) = \begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x} & если \quad x \neq 0, \\ 0 & если \quad x = 0, \end{cases} \qquad a = 0.$$

Решение

a) Если $\boldsymbol{x} \to 1$, то по свойствам пределов получаем $\boldsymbol{x}^3 \to 1$, т. е. для функции $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^3$ в точке $\boldsymbol{x} = 1$ выполняется условие (1). Поэтому функция $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^3$ непрерывна в точке $\boldsymbol{x} = 1$.

b) Если $x \to a$, где $a \neq 0$, то, используя свойства пределов, получаем

$$\frac{1}{x} \to \frac{1}{a}, \qquad \frac{1}{x^2} \to \frac{1}{a^2},$$

т.е. функция $f(x) = \dfrac{1}{a^2}$ непрерывна в точке $x = a$ $(a \neq 0)$.

c) Так как

$$\sqrt{x} - \sqrt{a} = \frac{|x-a|}{\sqrt{x} + \sqrt{a}},$$

то отсюда при $x > 0$ получаем

$$0 \leq \left|\sqrt{x} - \sqrt{a}\right| < \frac{|x-a|}{\sqrt{a}}$$

Следовательно, $\sqrt{x} - \sqrt{a} \to 0$ при $x \to a$, если $a > 0$. Это означает, что функция $f(x) = \sqrt{x}$ непрерывна в точке a, где $a > 0$.

d) Функция f определена на R^1 и при любом $x \in R^1$ выполняется неравенство

$$0 \leq |f(x) - f(0)| = |f(x)| \leq |x|,$$

так как $\left|\sin\dfrac{1}{x}\right| \leq 1$ при $x \neq 0$. Следовательно, $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0) = 0$, т. е. функция f непрерывна в точке $x = 0$.

Упражнения

1. Пользуясь определением непрерывности функции показать непрерывность функции $f(x) = 3x^4 + 5x^3 + 2x^2 + 3x + 4$ при любом значении x.

2. Пользуясь определением непрерывности функции показать, что функция $f(x) = \sqrt{x}$ непрерывна в каждой точке $x_0 > 0$ и непрерывна справа в точке $x_0 = 0$.

Пример. Функция $y = E(x)$, где $E(x) = [x]$ - целая часть числа x (наибольшее целое число, не превосходящее x) непрерывна справа в точке $x = 1$ и не является непрерывной слева в этой точке (рис.), так как $f(1-0) = 0$, $f(1+0) = f(1) = 1$. Стрелка на графике указывает на то, что точка в ее острие не принадлежит графику.

Очевидно, функция непрерывна в данной точке тогда и только тогда, когда она непрерывна как справа, так и слева в этой точке.

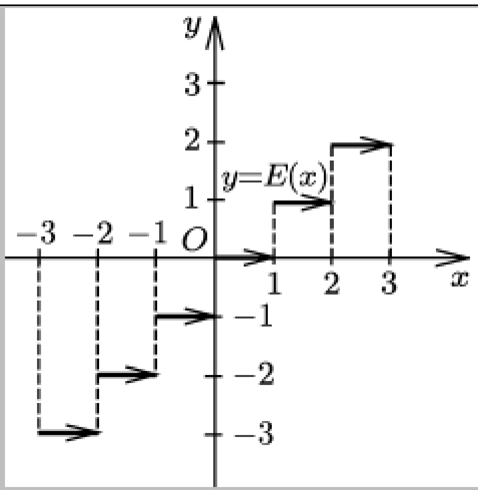


Рис.

Пример. Для функции $f(x) = x\sin\frac{1}{x}$ точка $x = 0$ - точка разрыва первого рода. Доопределив эту функцию по непрерывности, получим функцию

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} x\sin\frac{1}{x} & если \quad x \neq 0, \\ 0 & если \quad x = 0, \end{cases}$$

непрерывную в точке $x = 0$, так как $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0$.

Упражнения

В задачах 1-6 функция $y = f(x)$ определена в окрестности точки $\boldsymbol{x_0}$, кроме самой токи $\boldsymbol{x_0}$. Доопределить функцию $f(x)$, задав $f(x_0)$ так, чтобы получавшаяся функция была непрерывна в точке $\boldsymbol{x_0}$.

1. $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x+1}, \quad x_0 = -1.$ **2.** $f(x) = \dfrac{x^3 - 1}{x^2 - 1}, \quad x_0 = 1.$

3. $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x} - 1}{x}, \quad x_0 = 0.$ **4.** $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}, \quad x_0 = 0.$

5. $f(x) = x ctg x, \quad x_0 = 0.$ **6.** $f(x) = \dfrac{1 - \cos x}{x^2}, \quad x_0 = 0$

В задачах 7 – 18 найти точки разрыва функции, если они существуют, установить их род, найти скачки функции в точках разрыва 1-го рода, построить график функции.

7. $f(x)=(signx)^2$. **8.** $f(x)=E(x)$. **9.** $f(x)=\dfrac{|x|-x}{x^2}$.

10. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{5}(2x^2+3) & при \quad -\infty<x\le 1,\\ 6-5x & при \quad 1<x<3,\\ x-3 & при \quad 3\le x<+\infty.\end{cases}$ **11.** $f(x)=\dfrac{|2x-3|}{2x-3}$.

12. $f(x)=\begin{cases}-2x^2 & при \quad x\le 3,\\ 3x & при \quad x>3.\end{cases}$ **13.** $f(x)=\dfrac{|x+2|}{x+2}$.

14. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{(x+1)^2} & при \quad x\le 0,\\ (x+1)^2 & при \quad 0\le x\le 2,\\ 1-x & при \quad 2<x.\end{cases}$ **15.** $f(x)=\dfrac{1}{x^2-4}$.

16. $f(x)=\dfrac{|x-1|}{x^2-x^3}$. **17.** $f(x)=x-E(x)$. **18.** $f(x)=\dfrac{1}{x-E(x)}$.

Пример. Функция

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2x^2y}{x^4+y^2}, & если \quad x^2+y^2>0,\\ 0, & если \quad x=y=0\end{cases}$$

непрерывна в точке $(0,0)$ по любому лучу, но не является непрерывной в точке $(0,0)$.

Решение

Известно, что функция $f(x,y)$ не имеет предела при $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\to(0,0)$ и, следовательно, не является непрерывной в точке $(0,0)$. Еще известно, что в точке $(0,0)$ предел функции $f(x,y)$ по любому направлению существует и равен нулю. Следовательно, функция $f(x,y)$ непрерывна в точке $(0,0)$ по любому направлению.

Упражнения

1. Выяснить, является ли функция

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & при \quad x^2+y^2\ne 0,\\ 0 & при \quad x^2+y^2=0,\end{cases}$$

в точке $(0;0)$:

а) непрерывной по x; б) непрерывной по y; в) непрерывной.

2. Найти значение a, при котором функция

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & при \quad x^2+y^2\neq 0,\\ a & при \quad x^2+y^2=0,\end{cases}$$

в точке $(0;0)$:

а) непрерывной по x; б) непрерывной по y;

в) непрерывной по кривой $y=\alpha\sqrt{x}$, $\alpha\neq 0$;

г) непрерывной.

3. Выяснить, является ли функция

$$f(x,y)=\begin{cases}2arctg\dfrac{1}{x^2-y^2} & при \quad x+y\neq 0,\\ \pi & при \quad x+y=0,\end{cases}$$

непрерывной на своей области определения?

4. Следующие функции доопределить в точках, где они не определены, так, чтобы они оказались непрерывными в этих точках:

a) $f(x,y)=\dfrac{x^4+y^4}{x^2+y^2}$; ***b)*** $f(x,y)=\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}$;

c) $f(x,y)=\dfrac{x^4+y^4+x^3y^3}{x^4+y^4}$; ***d)*** $f(x,y)=\left(x^2+y\right)^{\frac{1}{x^2+y-1}}$.

5. Найти:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)$; б) $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)$; в) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$; если:

1) $u=\dfrac{x^3-y}{x^3+y}$; 2) $u=\dfrac{y^2-x^2}{x^2+y^2}$;

3) $u=\dfrac{x^2y+xy^2}{x^2-xy+y^2}$; 4) $u=x+y\sin\dfrac{1}{x}$.

6. Найти:

а) $\lim\limits_{x\to \infty}\lim\limits_{y\to \infty} f(x,y)$; б) $\lim\limits_{y\to \infty}\lim\limits_{x\to \infty} f(x,y)$; в) $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to \infty}} f(x,y)$; если:

1) $u=2\dfrac{x^2+y^2}{x^2+y^3}$; 2) $u=\dfrac{x^3+xy^2}{x^2+y^4}$; 3) $u=\sin\dfrac{\pi y^2}{x^2+3y^2}$.

Пример. Покажем, что функция $f(x)=x^2$ не будет равномерно непрерывной на интервале $(0,+\infty)$.

Решение

Пусть $\varepsilon_0=1$. Для любого $\delta>0$ возьмем $x'_\delta=\dfrac{1}{\delta}$, $x''_\delta=\dfrac{1}{\delta}+\dfrac{\delta}{2}$. Тогда

$$\rho(x''_\delta,x'_\delta)=\left|x''_\delta-x'_\delta\right|=\frac{\delta}{2}<\delta,$$

но

$$\left| f(x''_\delta) - f(x'_\delta) \right| = (x''_\delta)^2 - (x'_\delta)^2 = (x''_\delta - x'_\delta)(x''_\delta + x'_\delta) = \frac{\delta}{2}\left(\frac{1}{\delta} + \frac{1}{\delta} + \frac{\delta}{2}\right) \geq 1$$

Упражнение

Привести пример функции, непрерывной и ограниченной на (0,1), но не являющейся равномерно непрерывной на этом интервале.